Aula 20

Circuitos de primeira ordem 1
RC

Circuitos Elétricos I

Prof. Henrique Amorim - UNIFESP - ICT

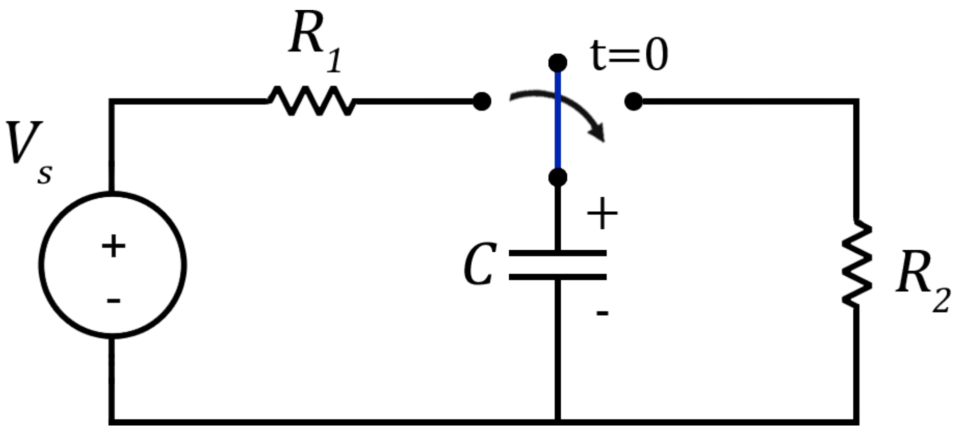
Definições

Um circuito de **primeira ordem** é caracterizado por uma **equação diferencial de primeira ordem**

As análises realizadas em circuitos puramente resistivos (R) resultavam apenas em equações algébricas. A partir desta aula iremos incorporar indutores (L) e capacitores (C) nas análises, estes componentes associados a resistores (RC ou RL) resultaram em equações diferenciais

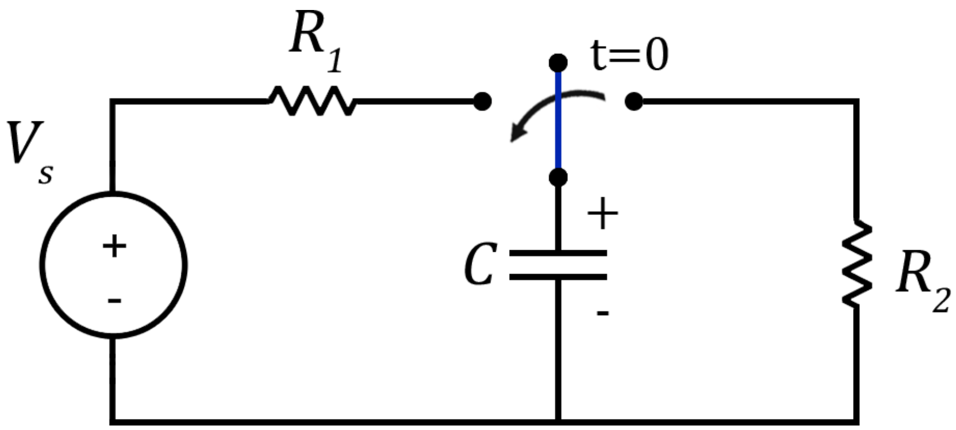
Tipos de resposta RC

Resposta Natural (descarga)



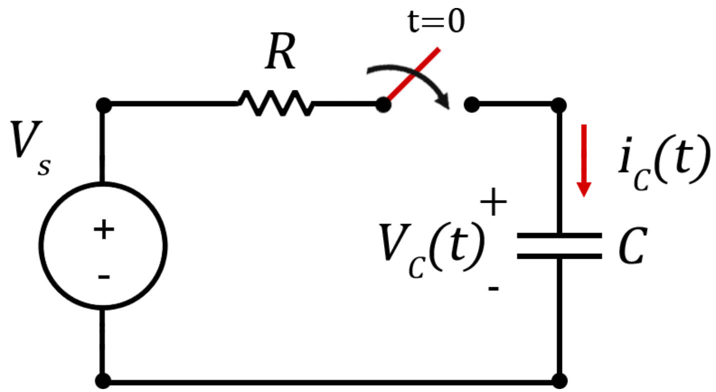
Resposta natural ou carga ou resposta sem fonte, se refere ao comportamento de corrente ou tensão do circuito, sem a presença de uma fonte

Resposta Forçada (carga)



Resposta forçada ou carga ou resposta ao degrau, se refere ao comportamento de corrente ou tensão do circuito, com a presença de uma fonte

Resposta RC forçada (a degrau)



A tensão do capacitor não muda de forma abrupta

$\mathbf{0^-} \rightarrow representa\ o\ instante\ anterior\ ao\ chaveamento$
$\mathbf{0^+} \rightarrow representa\ o\ instante\ postareior\ ao\ chaveamento$

$\boldsymbol{v_c(0^+) = v_c(0^-) = V_0}$

Análise dos nós (nó superior capacitor)

$$i_c + i_R = 0$$

$$C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c - v_s}{R} = 0$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c - v_s}{RC}$$

Diferenciando em relação ao tempo

$$dv_c = -\frac{v_c - v_s}{RC}dt$$

$$\frac{1}{v_c - v_s}dv_c = -\frac{1}{RC}dt$$

Resposta RC forçada (a degrau)

Integrando ambos os lados

$$\frac{1}{v_c - v_s} dv_c = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int_{V_0}^{v_c(t)} \frac{1}{v_c - v_s} dv_c = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt$$

$$\ln(v_c - v_s) \Big|_{V_0}^{v_c(t)} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^t$$

$$\ln(v_c(t) - v_s) - \ln(V_0 - v_s) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{v_c(t) - v_s}{V_0 - v_s}\right) = -\frac{t}{RC}$$

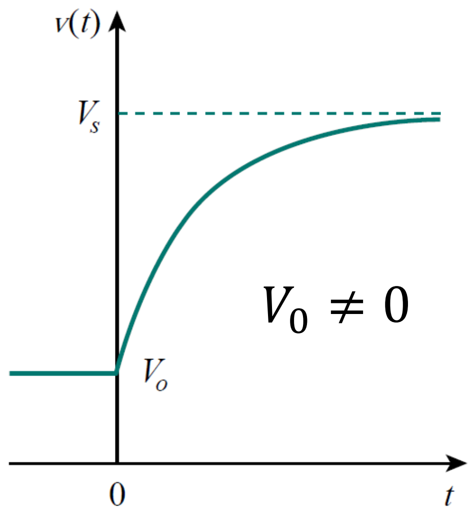
$$\frac{v_c(t) - v_s}{V_0 - v_s} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) - v_s = (V_0 - v_s)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v_c(t) = V_S + (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

Resposta RC forçada (a degrau)

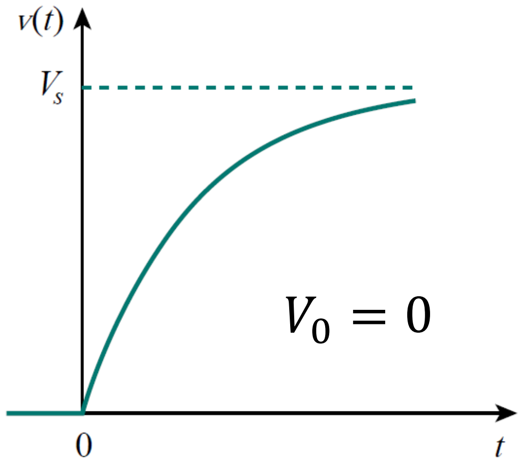
$$v_c(t) = \ V_S + (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{RC}}$$



Caso o capacitor não possua uma tensão inicial:

$$V_0 = 0$$

$$v_c(t) = \ V_S \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$



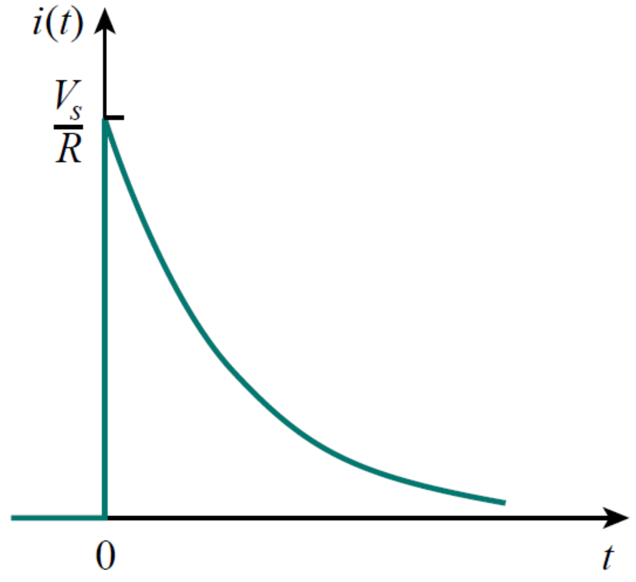
Resposta RC forçada (a degrau)

Para calcularmos a corrente no capacitor, basta derivarmos a tensão. Sabemos que:

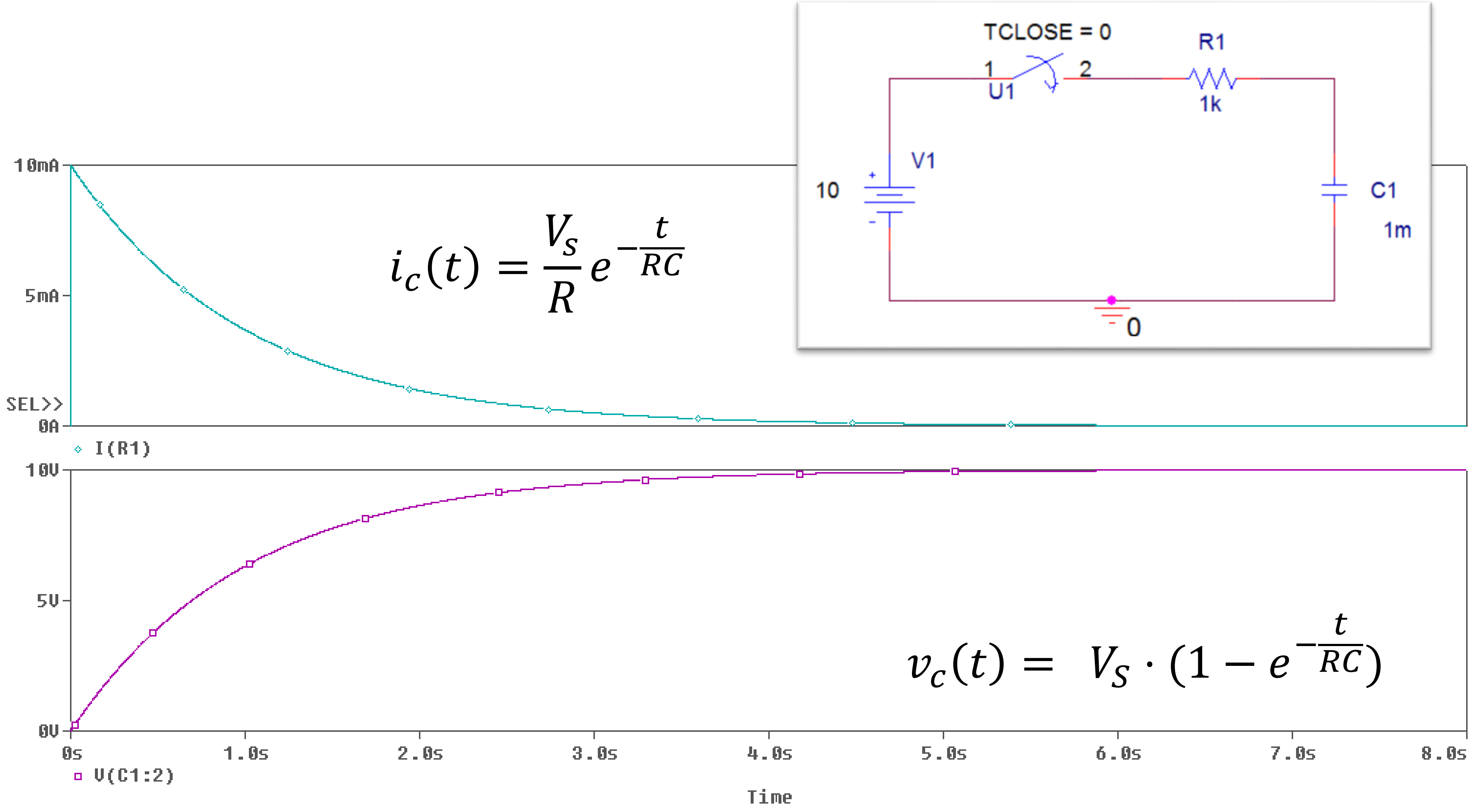
$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} \qquad v_c(t) = V_S + (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i_c(t) = \frac{(V_s - V_0)}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i_c(t) = \frac{V_s}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad \rightarrow \quad se\ V_0 = 0$$



Resposta RC forçada (a degrau)



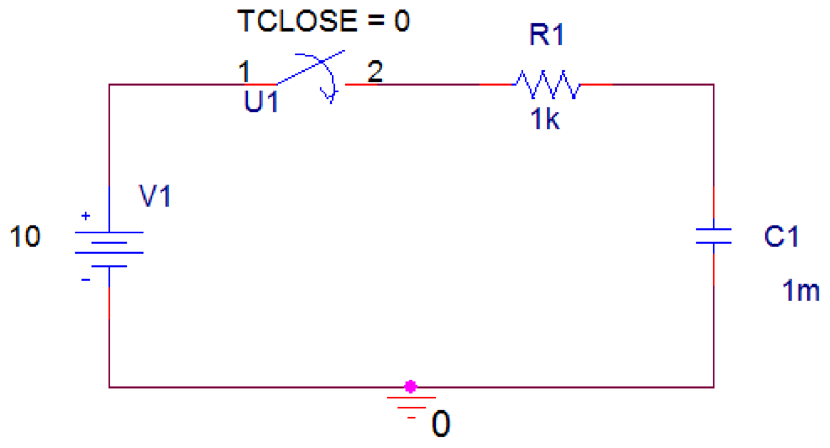
$$i_c(t) = \frac{V_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) = V_S \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Resposta RC forçada (a degrau)

Como observado nos gráficos anteriores, a constante...

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{RC}} \quad \boldsymbol{ou} \quad \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\tau}} \quad \boldsymbol{onde} \quad \boldsymbol{\tau = RC}$$



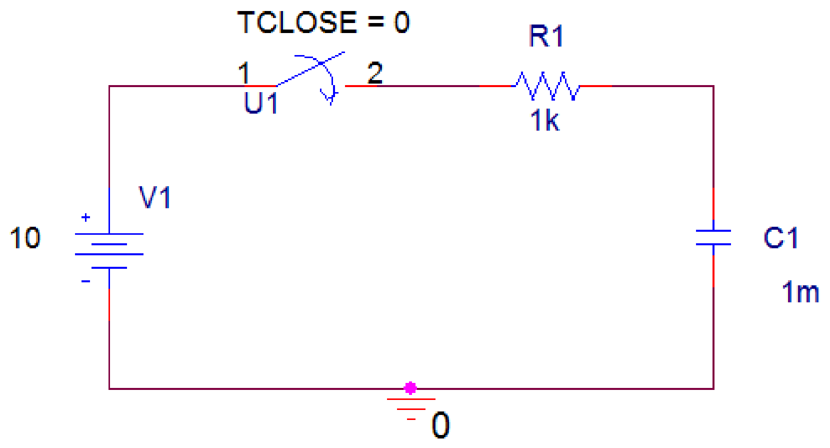
...faz referência ao tempo de carga (ou descarga) do capacitor (S.I. tempo=seg.). Quando o argumento da exponencial tende a menos infinito, a exponencial tende a zero. Como RC está relacionado ao tempo, essa constante recebeu a nomenclatura de **constante de tempo ($\boldsymbol{\tau = RC}$)**.

Resposta RC forçada (a degrau)

Neste exemplo a constante de tempo (tau) é igual a:

$$\boldsymbol{\tau = RC = 1m \cdot 1K = 1s}$$

** A unidade de tal é o segundo



Tempo	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	Tensão	Corrente	%
$t = 1\tau$	0,36788	6,3212V	0,36788mA	63,212%
$t = 2\tau$	0,13534	8,6466V	0,13534mA	86,466%
$t = 3\tau$	0,04979	9,5021V	0,04979mA	95,021%
$t = 4\tau$	0,01832	9,8168V	0,01832mA	98,168%
$t = 5\tau$	0,00674	9,9326V	0,00674mA	99,326%

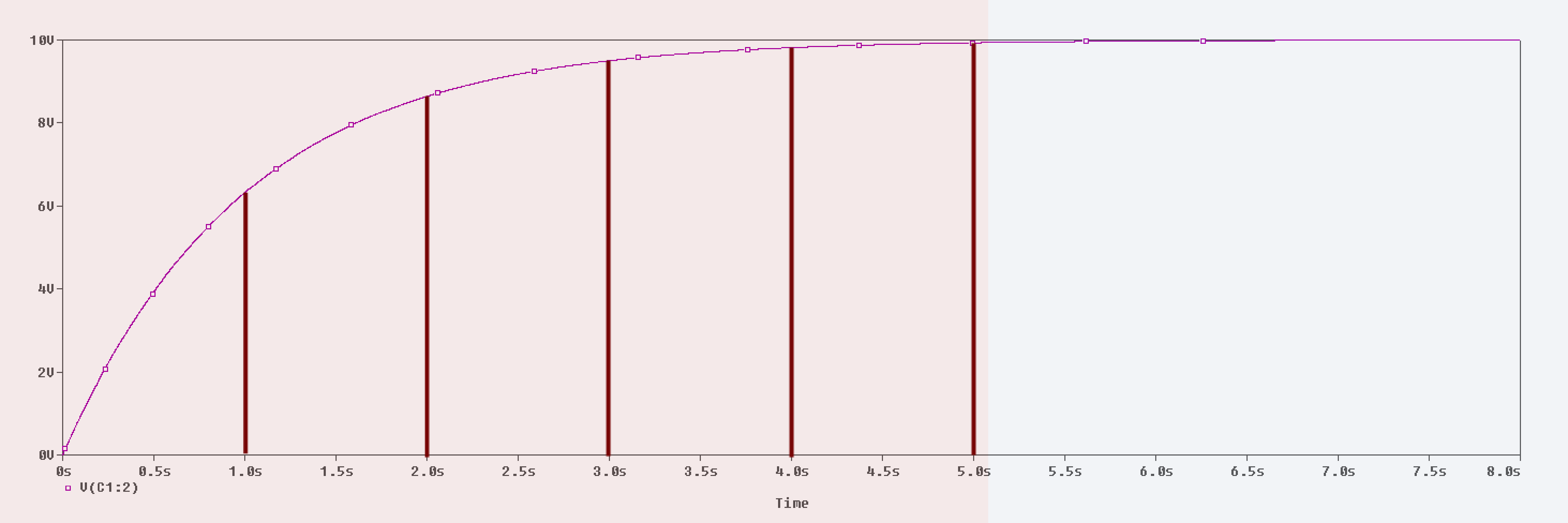
$$v_c(5\tau) = 10 \cdot (1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}})$$

$$v_c(t) = 10 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_c(t) = \frac{V_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Resposta RC forçada (a degrau)

Resposta transiente: resposta temporária do circuito que se extinguirá com o tempo



Resposta em regime estacionário: comportamento um longo tempo após excitação

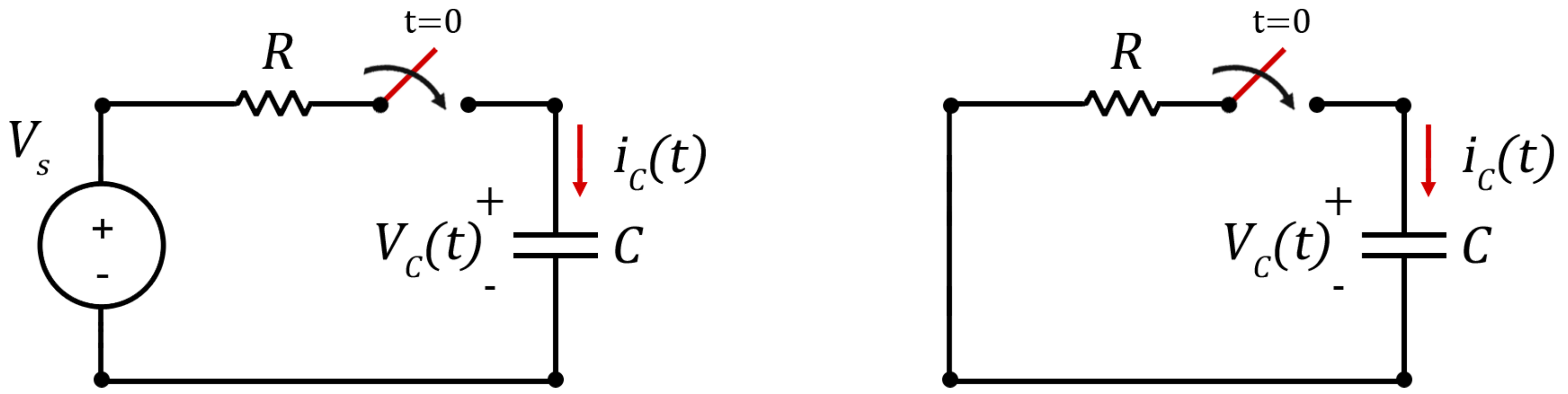
$$v_{completa} = v_{estac} + v_{trans}$$

$$v(t) = v(\infty) + \big(v(0) - v(\infty)\big) \cdot e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}}$$

Resposta RC natural (descarga do capacitor)

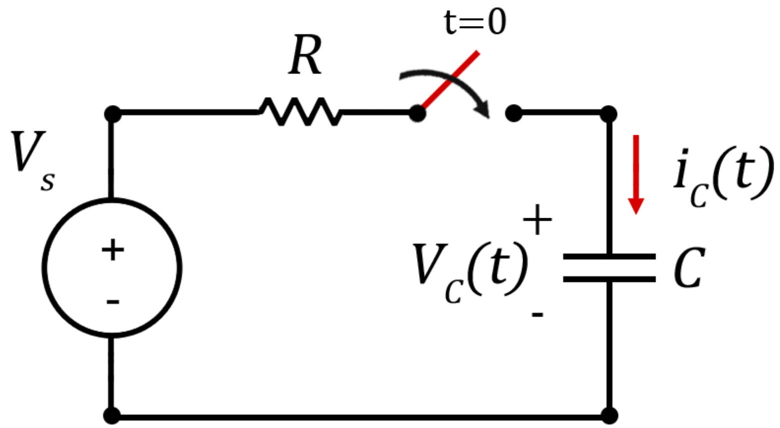
A resposta natural de um circuito RC avalia a descarga do capacitor.

Uma vez que o capacitor possua energia armazenada ($V_0 \neq 0$) e a diferença de potencial do circuito seja menor que a diferença de potencial do capacitor, o capacitor passará, durante um período transiente, a fornecer energia ao sistema, por meio de um contra fluxo de cargas



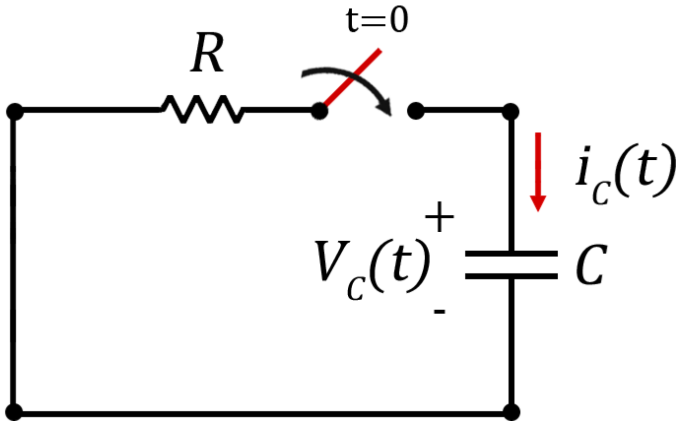
Para "economizarmos" a dedução da resposta natural do circuito RC, vamos utilizar o mesmo circuito da dedução da resposta forçada, porém considerando que: $\boldsymbol{V_s = 0 \quad e \quad V_0 \neq 0}$

Resposta RC natural (descarga do capacitor)



Resposta forçada:

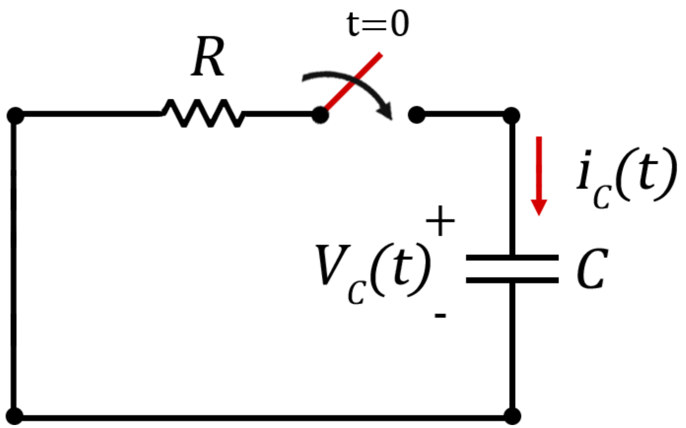
$$\boldsymbol{v_c(t) = V_S + (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \boldsymbol{\tau = RC}$$



Resposta natural: $(V_0 \neq 0 \;\; e \;\; V_s = 0)$

$$\boldsymbol{v_c(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \boldsymbol{\tau = RC}$$

Resposta RC natural (descarga do capacitor)



$$v_c(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = RC$$

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt}$$

$$i_c(t) = -\frac{V_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = RC$$

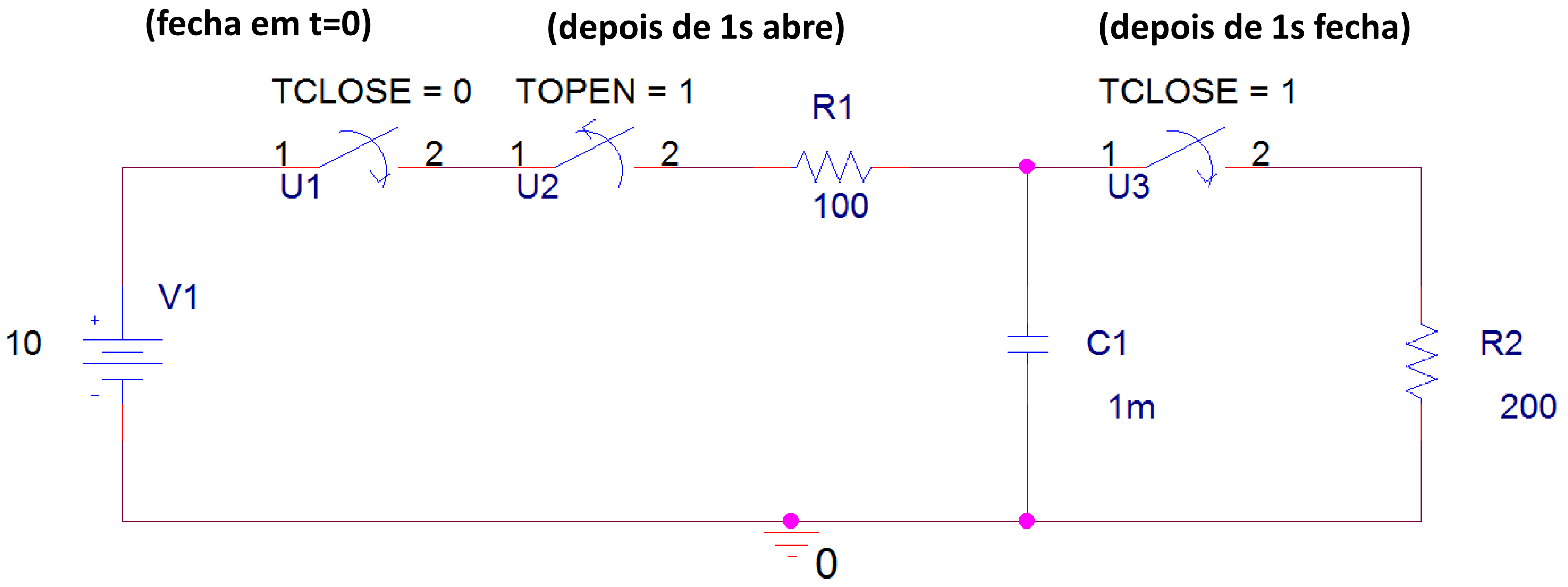
Por que a corrente é negativa?

Porque deduzimos a relação de corrente baseado nos parâmetros do circuito anterior (resposta forçada)

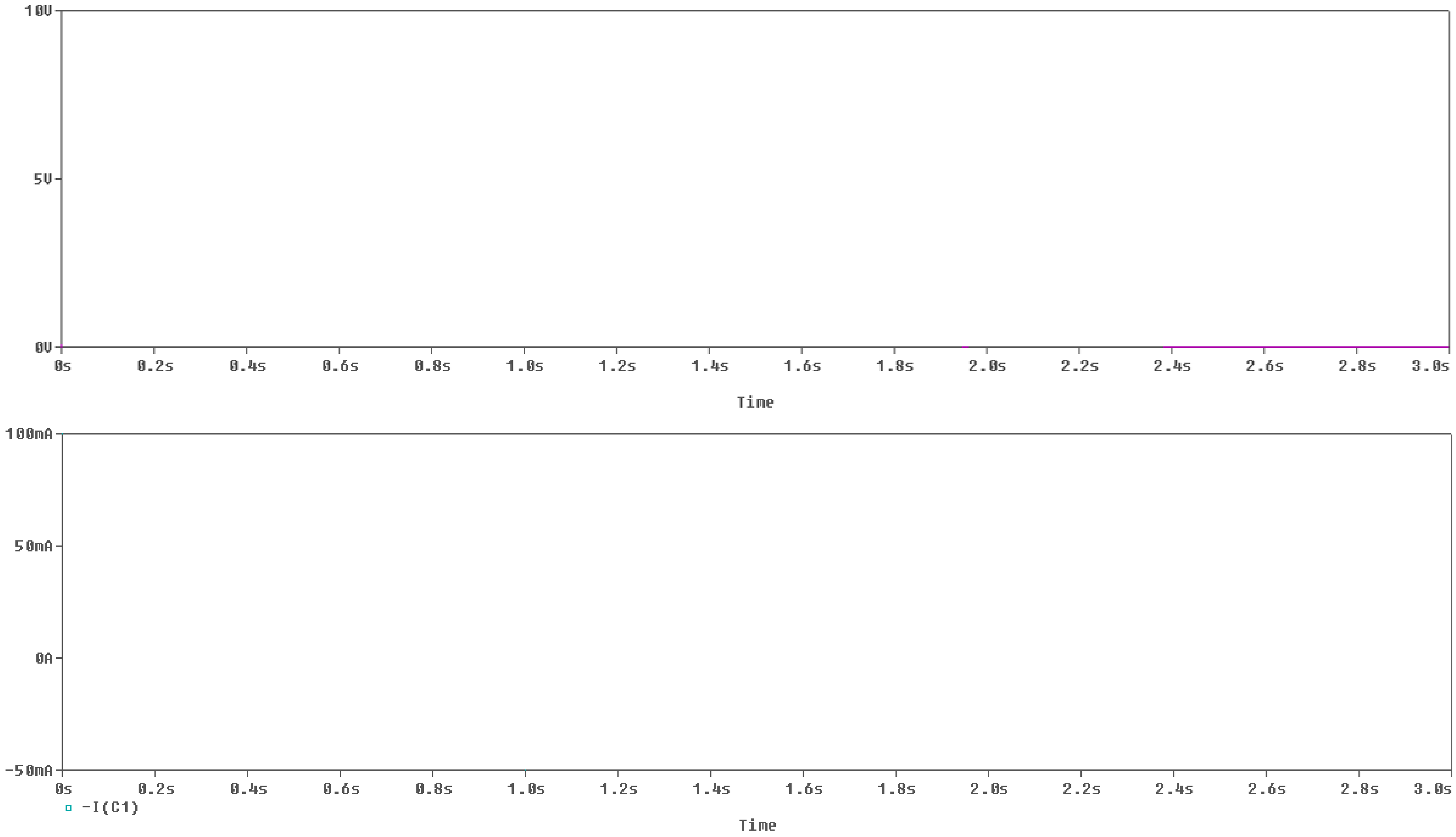
Quando carregamos o capacitor, a corrente está na direção da queda de tensão, entretanto, quando o capacitor descarrega, a corrente muda de direção e passa a fluir na elevação de tensão (similar a uma fonte geradora). Diferente da tensão (integral) que não pode variar de forma brusca, a corrente (derivada) pode variar de forma brusca.

Resposta RC natural (descarga do capacitor)

Exemplo: Qual o tempo para alcançar aproximadamente 99% da carga (5τ) do capacitor, qual o tempo para descarregar aproximadamente 99%, como serão os gráficos da tensão e da corrente do capacitor?

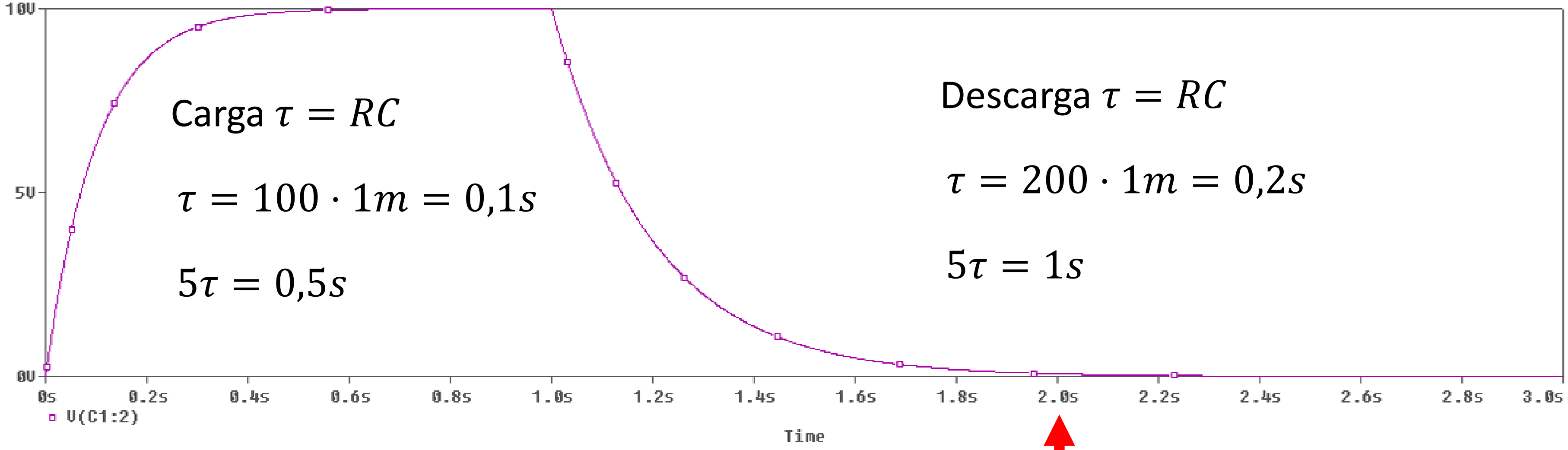


Resposta RC natural (descarga do capacitor)



Resposta RC natural (descarga do capacitor)

*Chave muda para descarga



Carga $\tau = RC$

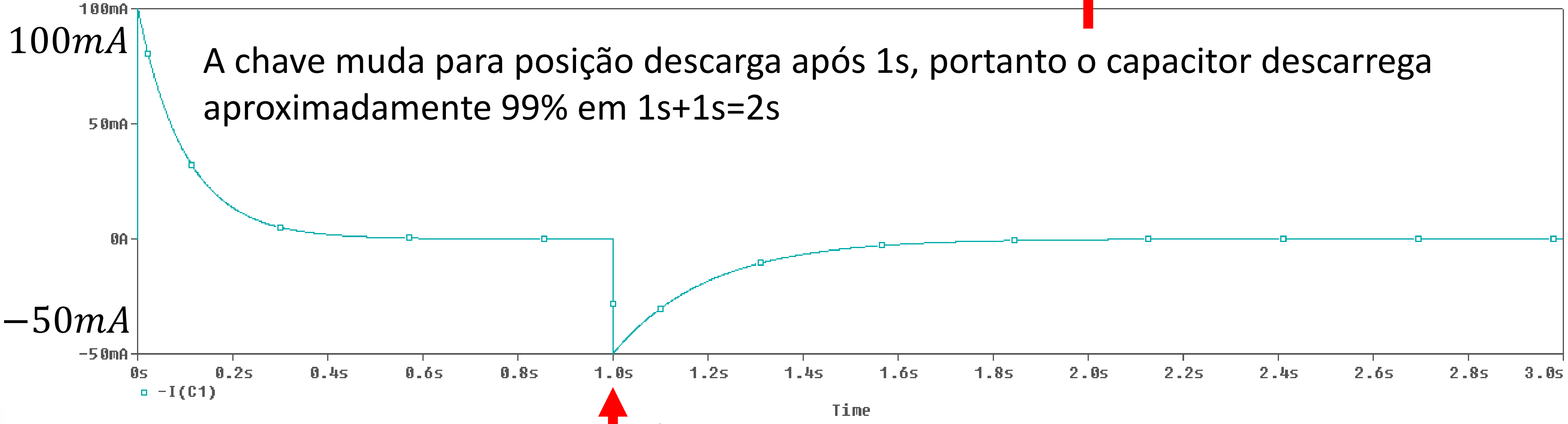
$\tau = 100 \cdot 1m = 0{,}1s$

$5\tau = 0{,}5s$

Descarga $\tau = RC$

$\tau = 200 \cdot 1m = 0{,}2s$

$5\tau = 1s$



$100mA$

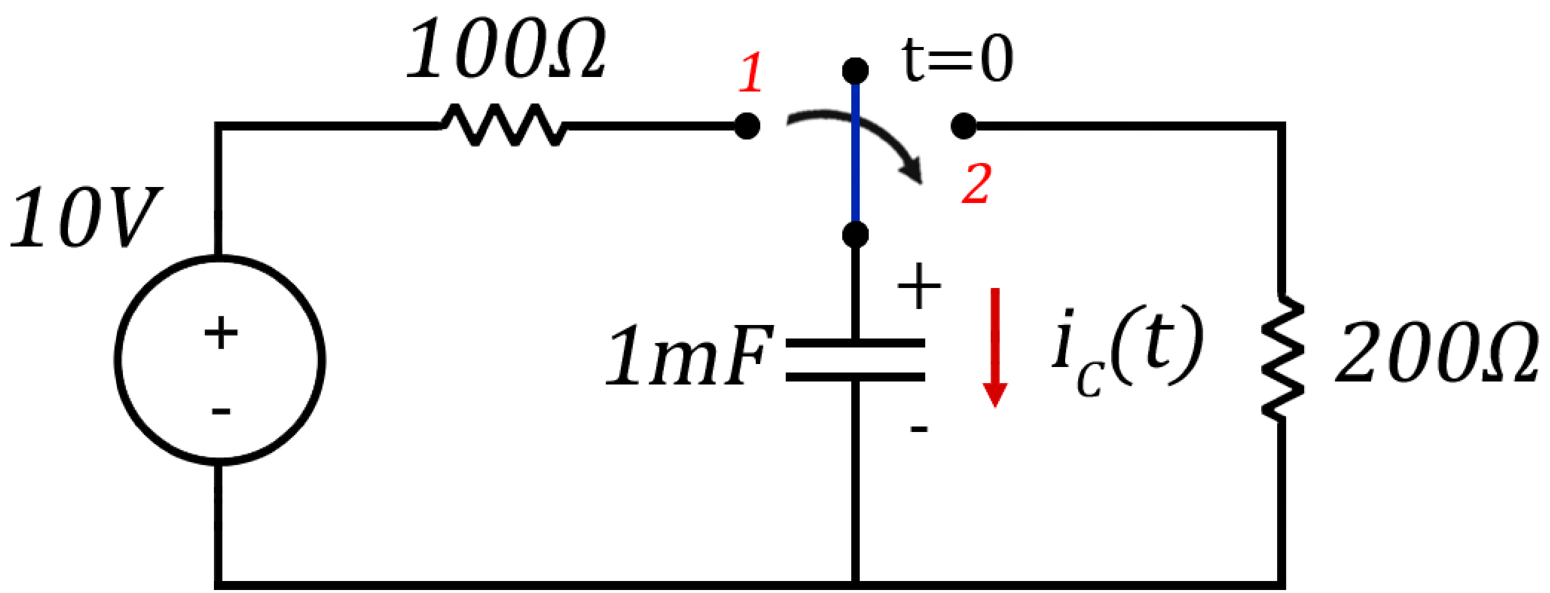
$-50mA$

A chave muda para posição descarga após 1s, portanto o capacitor descarrega aproximadamente 99% em 1s+1s=2s

*Inversão da direção da corrente

Resposta RC natural (descarga do capacitor)

Exemplo: A chave do circuito permaneceu na posição 1 por um longo período, instantaneamente passou para a posição 2 (t=0), encontre as equações que expressão o comportamento de v e i. Analise os instantes 0^{-} e 0^{+}.

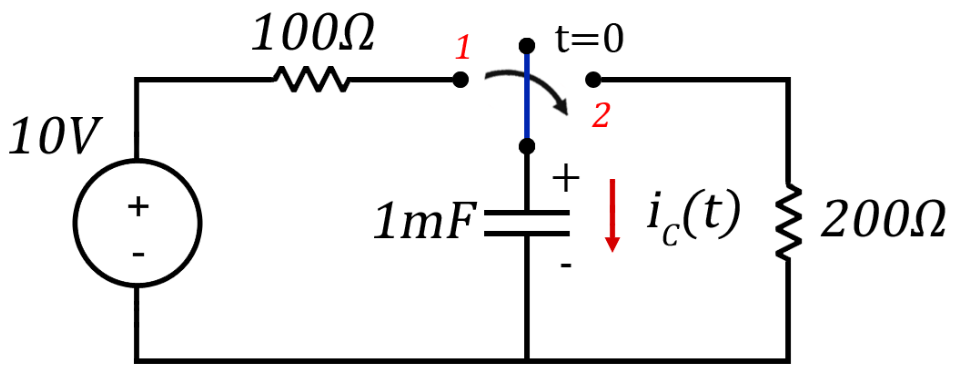


Resposta RC natural (descarga do capacitor)

Exemplo: A chave do circuito permaneceu na posição 1 por um longo período, em t=0 a chave muda instantaneamente para a posição 2, encontre as equações que expressam o comportamento de v e i. Analise os instantes $0^- \ e \ \ 0^+$.

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

$V_0 = 10V$ Comportamento em regime estacionário
Circuito aberto



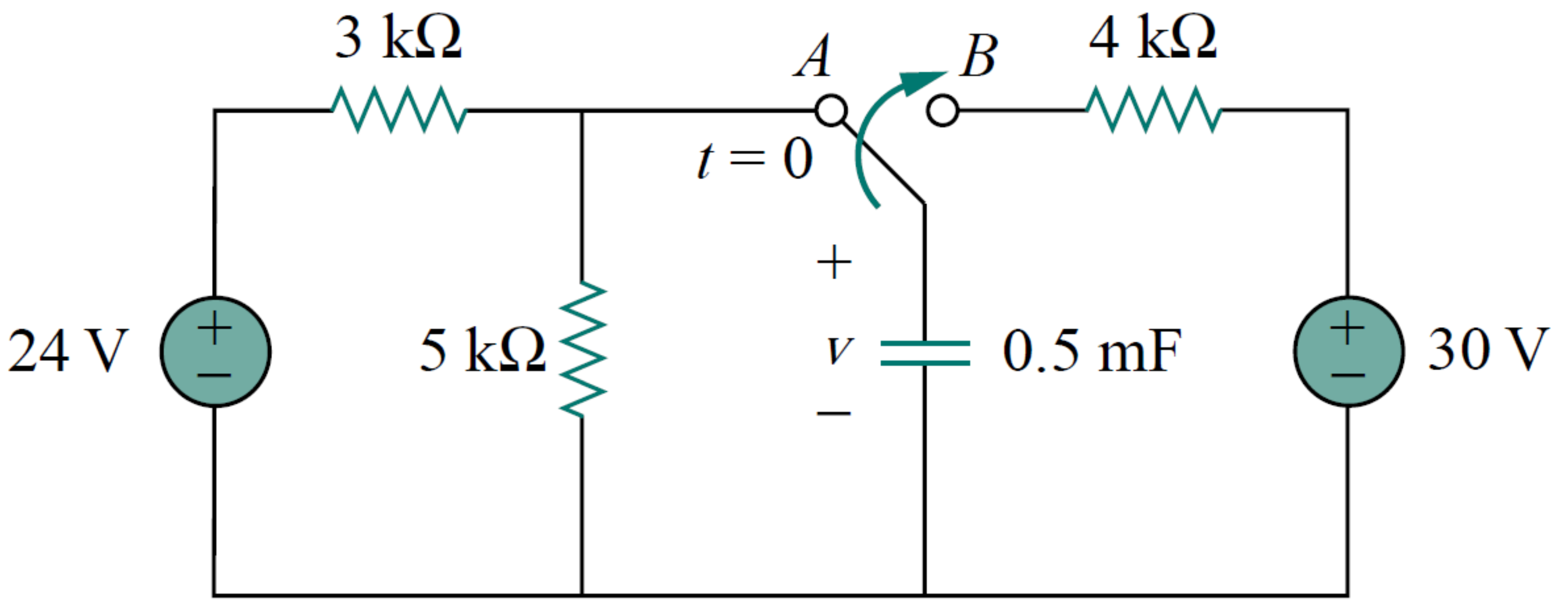
$$i(0^-) = 0$$

$$i(0^+) = -\frac{V_0}{200} = -\frac{10}{200} = -50mA$$

$\boldsymbol{\tau = 0,2 \ \ e \ \frac{1}{\tau} = 5}$ $\boldsymbol{v(t) = \ \ 10 \cdot e^{-5t} V}$ $\boldsymbol{i(t) = \ \ -50 \cdot e^{-5t} mA}$

Exercícios

Exercício: A chave da figura abaixo se encontra na posição A há um longo tempo. Em t=0, a chave muda instantaneamente para a posição B. Determine v(t) pata t>0.

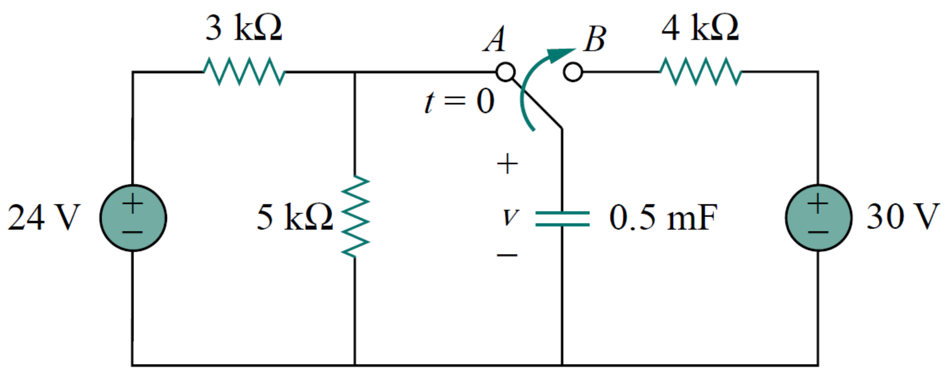


$$v_c(t) = \ 30 - 15 \cdot e^{-0,5t} V$$

Exercícios

Exemplo: A chave da figura abaixo se encontra na posição A há um longo tempo. Em t=0, a chave muda instantaneamente para a posição B. Determine v(t) pata t>0.

$$V_0 = 24 \cdot \frac{5K}{3K + 5K} = 15V$$



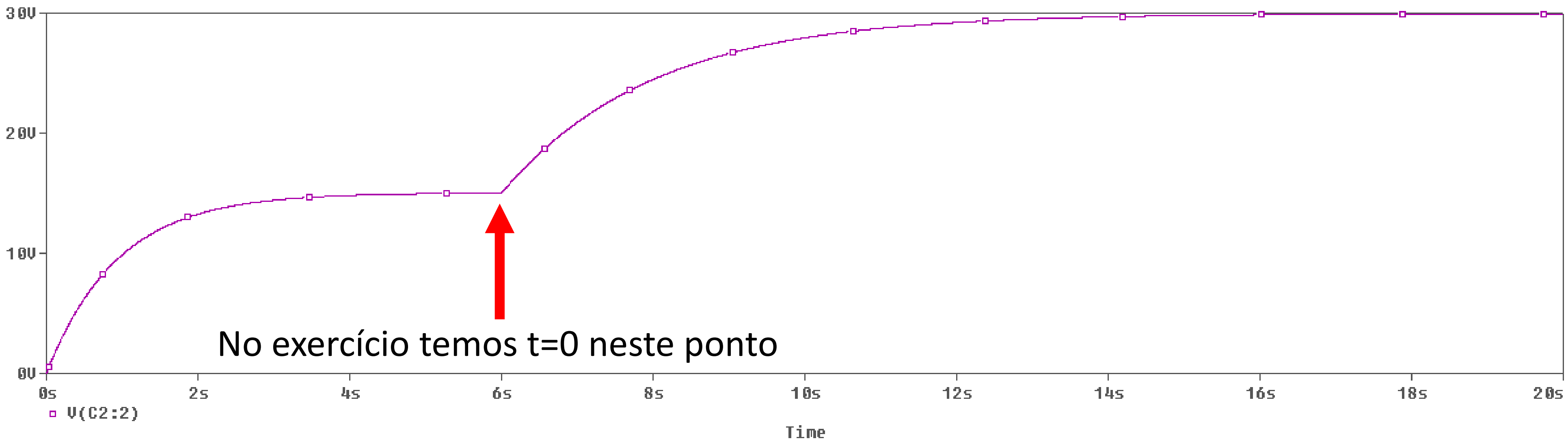
$$\tau = 4K \cdot 0{,}5m = 2s \qquad \frac{1}{\tau} = 0{,}5$$

$$v_c(t) = \ V_S + (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) = \ 30 + (15 - 30)e^{-0{,}5t}$$

$$\boldsymbol{v_c(t) = \ 30 - 15 \cdot e^{-0{,}5t} V}$$

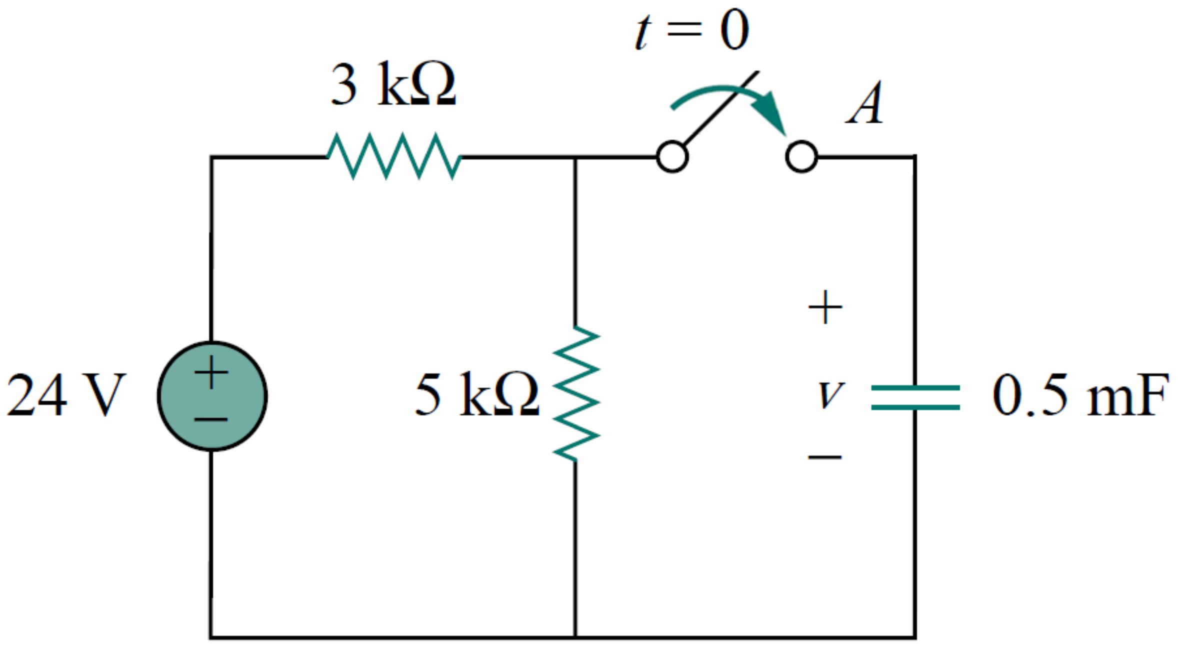
Exemplo: A chave da figura abaixo se encontra na posição A há um longo tempo. Em t=0, a chave muda instantaneamente para a posição B. Determine v(t) pata t>0.



*** Considerando o tempo da carga**

$$v_c(t) = 30 - 15 \cdot e^{-0{,}5t} V$$

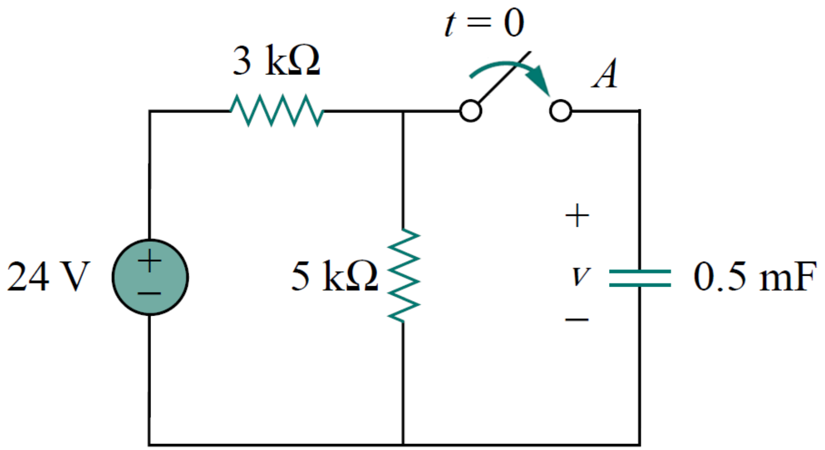
Exercício: Quando t=0 a chave é posicionada em A, calcule o tempo necessário para que o capacitor atinja aproximadamente 86% da sua carga (2τ) e a tensão neste instante . Considere que o capacitor não possui carga inicial.



$$2\tau = 1{,}875s \qquad v(2\tau) = 12{,}97V$$

Exercícios

Exercício: Quando t=0 a chave é posicionada em A, calcule o tempo necessário para que o capacitor atinja aproximadamente 86% da sua carga (2τ) e a tensão neste instante . Considere que o capacitor não possui carga inicial.



Primeiro calculamos o equivalente de Thévenin em relação aos terminais do capacitor

$$V_{th} = 24 \cdot \frac{5K}{3K + 5K} = 15V$$

$$R_{th} = 3K\,||\,5K = 1{,}875K\Omega$$

$$\tau = R_{th}C = 1{,}875K \cdot 0{,}5m = 0{,}9375s$$

$$2\tau = 2 \cdot 0{,}9375 = 1{,}875s$$

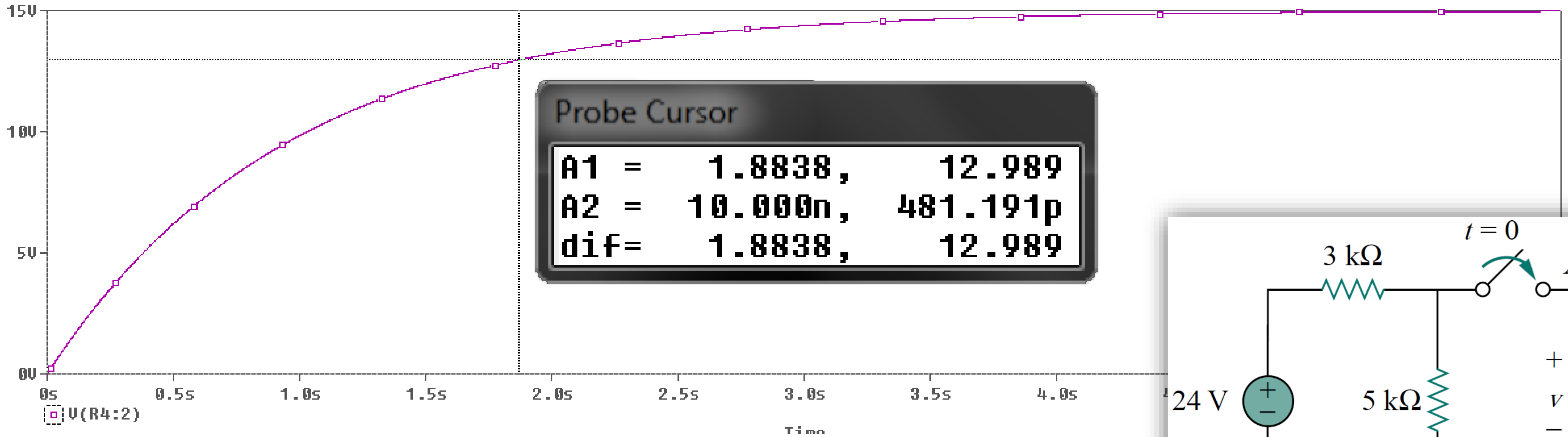
$$v_c(t) = \; V_{th} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

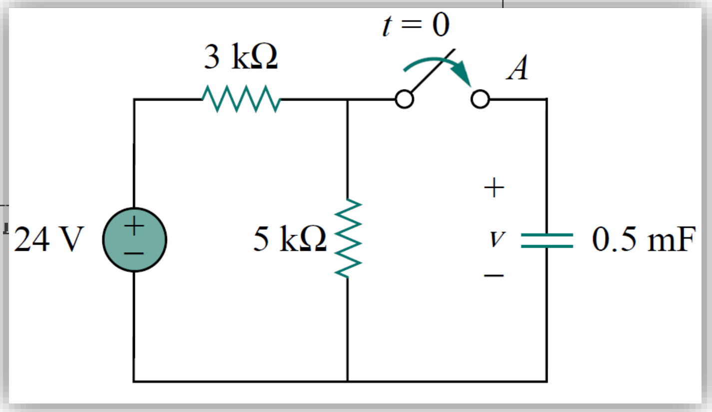
$$v_c(t) = \; 15 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{0{,}9375}})$$

$$v_c(2\tau) = \; 15 \cdot (1 - e^{-2})$$

$$\boldsymbol{v(2\tau) = 12{,}97V}$$

Exercício: Quando t=0 a chave é posicionada em A, calcule o tempo necessário para que o capacitor atinja aproximadamente 86% da sua carga (2τ) e a tensão neste instante . Considere que o capacitor não possui carga inicial.

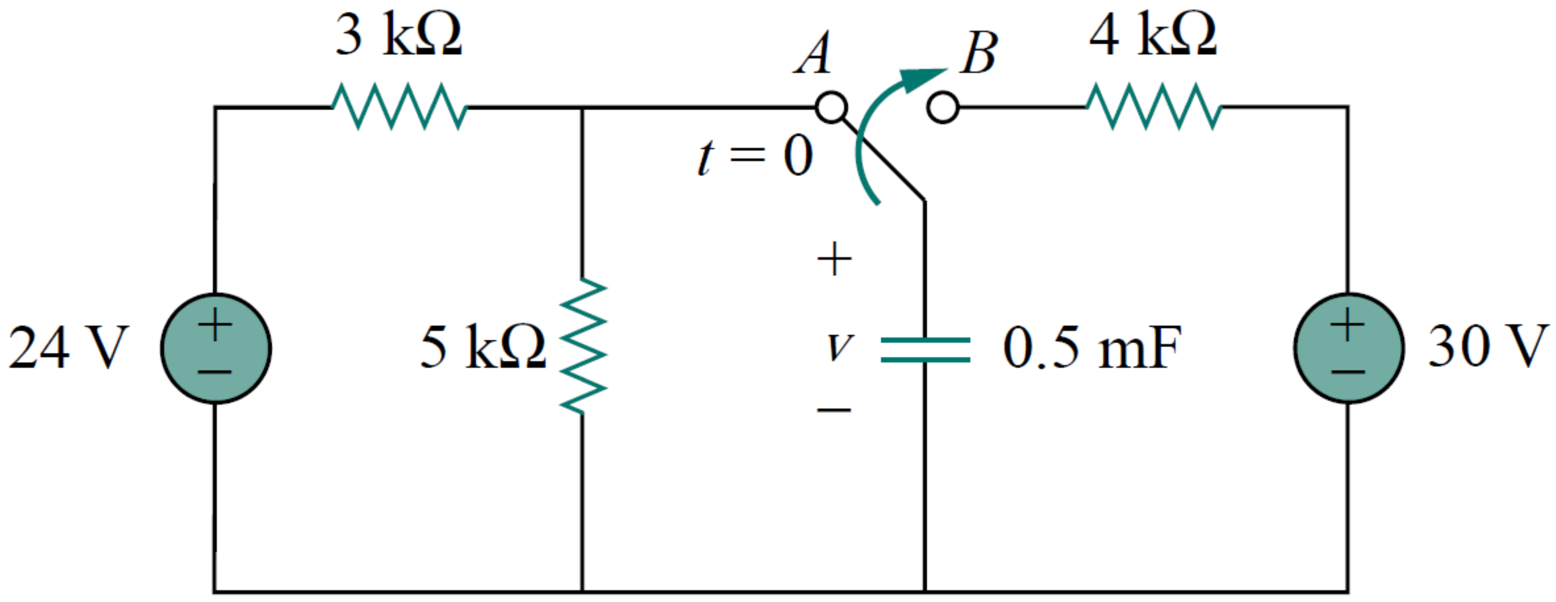




$$2\tau = 2 \cdot 0,9375 = 1,875s \qquad v(2\tau) = 12,97V$$

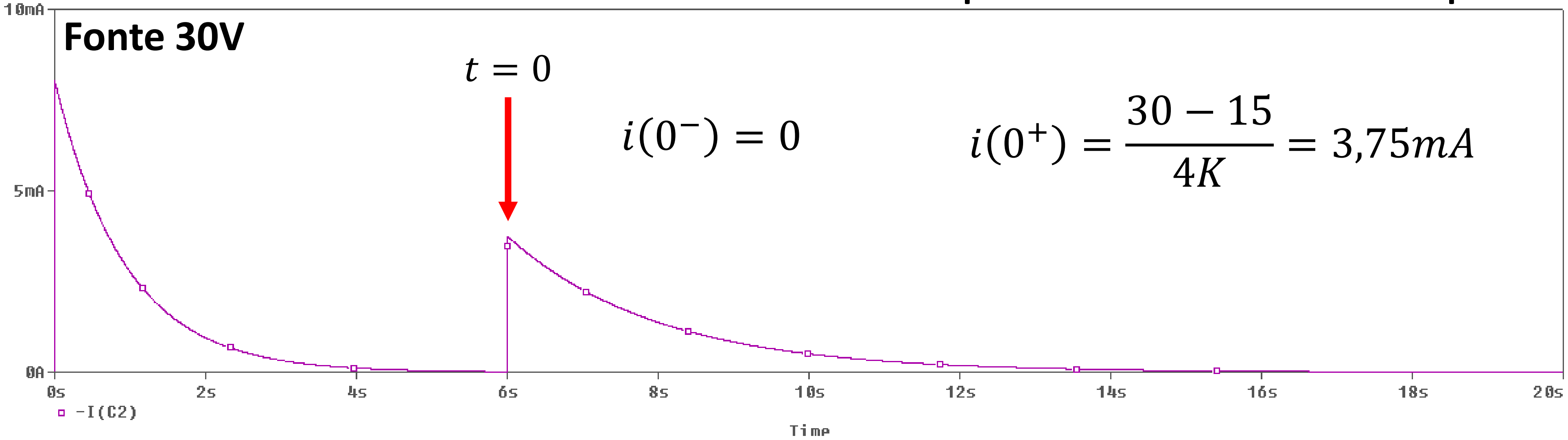
Exercícios

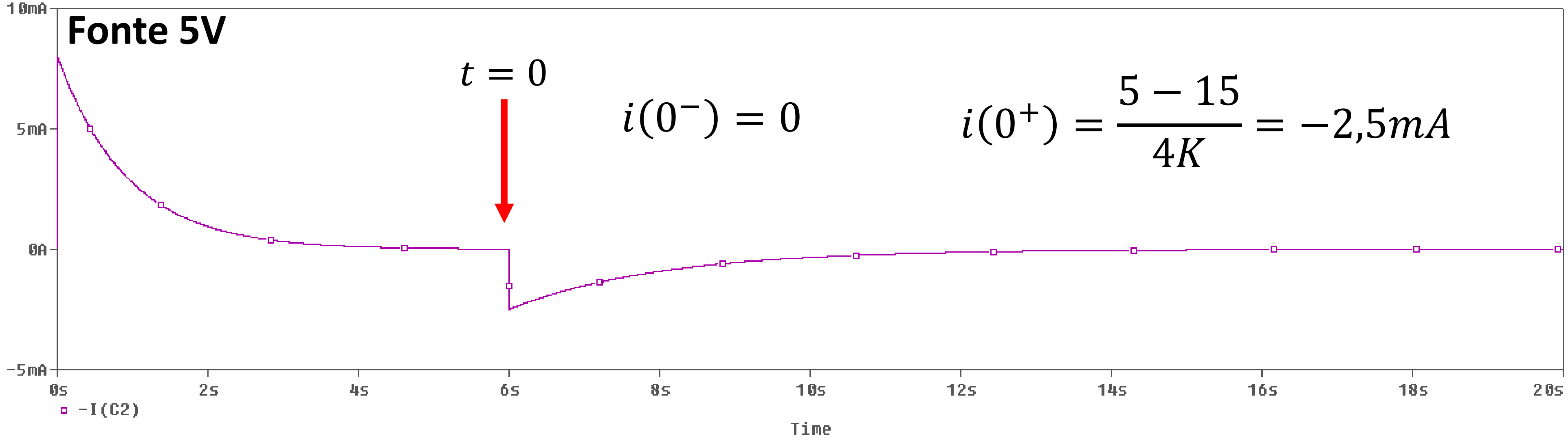
Exercício: Considere o mesmo circuito. Analise $i(0^-)\ e\ i(0^+)$ no instante que a chave muda para B. Caso a fonte de 30 seja substituída por uma fonte de 5V, como ficariam os novos $i(0^-)\ e\ i(0^+)$



Exercícios

Comportamento da corrente no capacitor





Exercícios

Comportamento da tensão no capacitor